

পৰিসংখ্যা (Statistics)

চতুৰ্দশ
অধ্যায়

There are lies, damned lies and statistics.

— by Disraeli

14.1. অৱতাৰণা (Introduction)

নৱম শ্ৰেণীত তোমালোকে সংঘৰদ্ধ, সংঘৰদ্ধ নোহোৱা বাৰংবাৰতা বিভাজন কৰি প্ৰদত্ত তথ্যৰ শ্ৰেণী বিভাজনৰ বিষয়ে শিকিলা। তথ্য কেনেকৈ বিভিন্ন নক্সা যেনে দণ্ডচিত্ৰ, হিষ্ট'গ্ৰাম বা স্তম্ভলেখ (বিভিন্ন পুতলৰ) আৰু বাৰংবাৰতা বহুভুজৰ সহায়ত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি তোমালোকে তাকো শিকিলা। মুঠতে তোমালোকে আৰু এখোজ আগুৱাই সংঘৰদ্ধ নোহোৱা তথ্যৰ সাংখ্যিক ৰূপৰ বিষয়েও শিকিলা— ইয়াক কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ মাপ বোলে, যেনে— মাধ্য (Mean), মধ্যমা (Median) আৰু বহুলক (Mode)। এই অধ্যায়ত আমাৰ অধ্যয়ন এই তিনিবিধ জোখৰ অৰ্থাৎ, মাধ্য, মধ্যমা আৰু বহুলকৰ বিষয়ে সংঘৰদ্ধ নোহোৱা তথ্যৰপৰা সংঘৰদ্ধ তথ্যলৈ সম্প্ৰসাৰণ কৰিম। আমি সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা, সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ ধাৰণা আৰু কেনেকৈ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা লেখ যাক অ'জিভ (ogives) বোলে, অংকন কৰিব পাৰি তাকো অধ্যয়ন কৰিম।

14.2. সংঘৰদ্ধ তথ্যৰ মাধ্য (Mean of Grouped Data) :

আমি জানো যে, পৰ্য্যবেক্ষণৰ মাধ্য হ'ল আটাইবোৰ পৰ্য্যবেক্ষণৰ মুঠ মানক পৰ্য্যবেক্ষণৰ সংখ্যাৰে হৰণ কৰি পোৱা মান। নৱম শ্ৰেণীৰ পৰা মনত পেলাওঁ— যদি x_1, x_2, \dots, x_n পৰ্য্যবেক্ষণৰ বাৰংবাৰতা ক্ৰমে f_1, f_2, \dots, f_n তেনেহ'লে ইয়াৰ ইয়াৰ অৰ্থ হ'ব x_1 পৰ্য্যবেক্ষণ f_1 বাৰ, x_2 পৰ্য্যবেক্ষণ f_2 বাৰ আৰু এনেকৈয়ে ওলাই থাকিব।

$$\text{এতিয়া পৰ্য্যবেক্ষণৰ মানৰ সমষ্টি} = f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_nx_n,$$

$$\text{আৰু মুঠ পৰ্য্যবেক্ষণ} = f_1 + f_2 + \dots + f_n.$$

$$\text{গতিকে, তথ্যৰ মাধ্য } \bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

মনত পেলোৱা যে, আমি সংক্ষেপে গ্ৰীক আখৰ Σ (বৰফলাৰ চিগ্ৰমা) অৰ্থাৎ সমষ্টি, ব্যৱহাৰ কৰি লিখিব পাৰো। সেয়া হ'ল—

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \text{ যিটো আৰু সংক্ষেপে, লিখা হয় } \bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}, \text{ ইয়াত } i, 1 \text{ ৰ পৰা } n \text{ অলৈ}$$

প্ৰসাৰিত বুলি বুজা যায়। তলৰ উদাহৰণত মাধ্য উলিওৱাত এই সূত্ৰটো ব্যৱহাৰ কৰোঁহক—

উদাহৰণ 1 : তলৰ তালিকাত এখন বিদ্যালয়ৰ 30 জন দশম শ্ৰেণীৰ ছাত্ৰই 100 নম্বৰৰ গণিতৰ প্ৰশ্নকাকত এখনত পোৱা নম্বৰ সন্নিৱিষ্ট কৰা হ'ল। ছাত্ৰসকলে লাভ কৰা নম্বৰৰ মাধ্য নিৰ্ণয় কৰা।

লাভ কৰা নম্বৰ (x_i)	10	20	36	40	50	56	60	70	72	80	88	92	95
ছাত্ৰৰ সংখ্যা (f_i)	1	1	3	4	3	2	4	4	1	1	2	3	1

সমাধান : মনত পেলোৱা যে, মাধ্য নম্বৰ উলিয়াবলৈ হ'লে আমি প্ৰতিটো x_i ৰ লগত অনুৰূপ বাৰংবাৰতা f_i পূৰণ কৰিব লাগিব। গতিকে, এইখিনি তালিকা 14.1.ত দেখুওৱাৰ দৰে এটা স্তম্ভত লিখোঁহক।

তালিকা 14.1

লাভকৰা নম্বৰ (x_i)	ছাত্ৰৰ সংখ্যা (f_i)	$f_i x_i$
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
মুঠ	$\Sigma f_i = 30$	$\Sigma f_i x_i = 1779$

$$\text{এতিয়া, } \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1779}{30} = 59.3$$

সেয়ে, লাভ কৰা নম্বৰৰ মাধ্য হ'ল 59.3.

আমাৰ বাস্তৱ জীৱনৰ বহুক্ষেত্ৰত সাধাৰণতে তথ্যৰ পৰিসৰ বহু বেছি হয়, সেয়ে এটা অৰ্থবহু অধ্যয়নৰ বাবে ইয়াক সংঘবদ্ধ তথ্যত আৱদ্ধ কৰাৰ প্ৰয়োজন। সেইবাবে আমি প্ৰদত্ত সংঘবদ্ধ নোহোৱা তথ্যক সংঘবদ্ধ তথ্যলৈ পৰিবৰ্তন কৰিম আৰু ইয়াৰ গড় নিৰ্ণয়ৰ কিছুমান নিয়ম বাহিৰ কৰিম।

উদাহৰণ-1ৰ সংঘবদ্ধ নোহোৱা তথ্য 15 পৰিসৰৰ শ্ৰেণী অন্তৰালত প্ৰকাশ কৰি সংঘবদ্ধ তথ্যলৈ ৰূপান্তৰ কৰোঁহক। মনত পেলোৱা যে, শ্ৰেণী অন্তৰালত বাৰংবাৰতাবে অনুভুক্ত কৰোতে, অন্তৰালৰ উচ্চসীমাত থকা ছাত্ৰজন পিছৰ শ্ৰেণী অন্তৰালত অনুভুক্ত কৰা হয়। যেনে, 40 নম্বৰ পোৱা 4 জন ছাত্ৰ 40-55 শ্ৰেণী অন্তৰালত অনুভুক্ত হ'ব আৰু 25-40 ত নহয়। মনত এই ধাৰণা লৈ, আমি এখন সংঘবদ্ধ বাৰংবাৰতা তালিকা প্ৰস্তুত কৰোঁহক (তালিকা 14.2)

তালিকা 14.2

শ্ৰেণীবিভাজন	10 - 25	25 - 40	40 - 55	55 - 70	70 - 85	85 - 100
ছাত্ৰৰ সংখ্যা	2	3	7	6	6	6

এতিয়া, প্ৰতিটো শ্ৰেণী অন্তৰালৰ বাবে আমাক এনে এটা বিন্দু লাগে যি গোটেই শ্ৰেণীটোক প্ৰতিনিধিত্ব কৰিব। এইটো ধৰা হওঁক যে, প্ৰতিটো শ্ৰেণী অন্তৰালৰ বাৰংবাৰতা ইয়াৰ মধ্যবিন্দুত কেন্দ্ৰ কৰি আঁগুৰি আছে। সেইবাবে প্ৰতিটো শ্ৰেণীৰ মধ্যবিন্দু (বা শ্ৰেণী সূচক) এ প্ৰতিটো শ্ৰেণী থকা পৰ্য্যবেক্ষণবোৰ প্ৰতিনিধিত্ব কৰে বুলি বাছি ল'ব পাৰি। মনত পেলোৱা যে, এটা শ্ৰেণীৰ মধ্যবিন্দু (বা শ্ৰেণীসূচক) আমি শ্ৰেণীটোৰ উচ্চ আৰু নিম্নসীমাৰ গড় লৈ নিৰ্ণয় কৰোঁ। অৰ্থাৎ,

$$\text{শ্ৰেণী সূচক} = \frac{\text{শ্ৰেণীৰ উচ্চ সীমা} + \text{শ্ৰেণীৰ নিম্ন সীমা}}{2}$$

তালিকা 14.2 সাপেক্ষে 10-25 অন্তৰালৰ শ্ৰেণী সূচক হ'ল $\frac{10+25}{2}$, অৰ্থাৎ, 17.5। একেদৰে বাকী শ্ৰেণী অন্তৰালৰ শ্ৰেণী সূচক আমি নিৰ্ণয় কৰিব পাৰোঁ। আমি এইবোৰ তালিকা 14.3 ত বহুৱাওঁ। এই শ্ৰেণী সূচকে আমাক x_i বোৰ নিৰ্দেশ কৰিব। এতিয়া, সাধাৰণতে, i তম শ্ৰেণী অন্তৰালৰ বাবে, আমি x_i শ্ৰেণী সূচকৰ অনুৰূপ বাৰংবাৰতা পাওঁ f_i । আমি, এতিয়া উদাহৰণ-1ৰ দৰে গড় নিৰ্ণয় কৰিবলৈ আগবাঢ়িব পাৰোঁ।

তালিকা 14.3

শ্ৰেণী অন্তৰাল	ছাত্ৰৰ সংখ্যা (f_i)	শ্ৰেণীসূচক (x_i)	$f_i x_i$
10 - 25	2	17.5	35.0
25 - 40	3	32.5	97.5
40 - 55	7	47.5	332.5
55 - 70	6	62.5	375.0
70 - 85	6	77.5	465.0
85 - 100	6	92.5	555.0
মুঠ	$\Sigma f_i = 30$		$\Sigma f_i x_i = 1860.0$

শেষৰ স্তম্ভৰ মানবোৰৰ সমষ্টি পাওঁ- $\Sigma f_i x_i$ । সেইবাবে, প্ৰদত্ত তথ্যৰ মাধ্য \bar{x} হ'ল—

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1860.0}{30} = 62$$

মাধ্য উলিওৱা এই নতুন পদ্ধতিটোক প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতি (Direct method) বুলি জনা যায়।

আমি দেখা পাওঁ যে, তালিকা 14.1 আৰু 14.3 ত একেখিনি তথ্য আৰু একে সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি মাধ্য উলিওৱা হৈছে কিন্তু ফলাফলৰ পাৰ্থক্য আছে। তোমালোকে ভাবিব পাৰিছানে কিয় এনে হৈছে আৰু কোনটো বেছি নিখুঁত? তালিকা 14.3 ধৰা মধ্যবিন্দুৰ বাবেই দুয়োটা মানৰ পাৰ্থক্য ঘটিছে। 59.3 হ'ল আচল মাধ্য (exact mean) অন্যহাতে 62 এটা আসন্ন মাধ্য (approximate mean)।

কেতিয়াবা, x_i আৰু f_i ৰ সাংখ্যিকমান যেতিয়া ডাঙৰ হয়, x_i আৰু f_i ৰ গুণফল উলিওৱাটো আমনিদায়ক আৰু সময় খৰচী হয়। সেয়ে, এনে অৱস্থাত হিচাব নিকাচ কৰাৰ বাবে আমি এটা পদ্ধতি ভাবোঁহক।

আমি f_i বোৰক একো কৰিব নোৱাৰোঁ, কিন্তু আমি x_i বোৰক সৰু সংখ্যালৈ পৰিবৰ্তন কৰিব পাৰোঁ যাতে আমাৰ গণনা কাৰ্য্য সহজ হয়। আমি এইটো কেনেকৈ কৰিম? প্ৰতিটো x_i ৰ পৰা এটা নিৰ্দিষ্ট সংখ্যা বিয়োগ কৰিলে কি হ'ব? এই পদ্ধতিটো আমি চেষ্টা কৰোঁহক।

প্ৰথম ঢাপত আমি x_i ৰ মাজৰ এটাক গড় বুলি ধৰিম আৰু ইয়াক 'a' ৰে নিৰ্দেশ কৰিম। গণনা কাৰ্য্য আৰু কৰিবলৈ আমি 'a' ক x_1, x_2, \dots, x_n ৰ কেন্দ্ৰত থকা x_i ৰ বাবে ল'ম। গতিকে, আমি বাছি ল'ব পাৰোঁ— $a = 47.5$ বা $a = 62.5$ । ধৰো $a = 47.5$ ।

পিচৰ ঢাপত a আৰু প্ৰতিটো x_i ৰ মাজৰ পাৰ্থক্য d_i নিৰ্ণয় কৰিম, অৰ্থাৎ প্ৰত্যেকটো x_i ৰ পৰা 'a' ৰ বিচ্যুতি (deviation) উলিয়াওঁ।

অর্থাৎ, $d_i = x_i - a = x_i - 47.5$

তৃতীয় ঢাপত d_i ৰ লগত অনুৰূপ f_i বোৰৰ গুণফল উলিয়াম, সকলো $f_i d_i$ ৰ সমষ্টি উলিয়াম।
এই গণনাসমূহ তালিকা 14.4 ত দেখুওৱা হ'ল-

তালিকা 14.4

শ্ৰেণী অন্তৰাল	ছাত্ৰৰ সংখ্যা (f_i)	শ্ৰেণীসূচক (x_i)	$d_i = x_i - 47.5$	$f_i d_i$
10 - 25	2	17.5	-30	-60
25 - 40	3	32.5	-15	-45
40 - 55	7	47.5	0	0
55 - 70	6	62.5	15	90
70 - 85	6	77.5	30	180
85 - 100	6	92.5	45	270
মুঠ	$\Sigma f_i = 30$			$\Sigma f_i d_i = 435$

গতিকে, তালিকা 14.4 ৰ পৰা বিচ্যুতিৰ মাধ্য $\bar{d} = \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$.

এতিয়া আমি \bar{d} আৰু \bar{x} ৰ মাজৰ সম্বন্ধ উলিয়াম—

যিহেতু d_i উলিয়াওঁতে আমি প্রতিটো x_i ৰ পৰা 'a' বিয়োগ কৰিছিলো, সেয়ে \bar{x} মাধ্য পাবলৈ
আমি \bar{d} ৰ লগত 'a' যোগ কৰিব লাগিব। এইটো গাণিতিকভাৱে ব্যাখ্যা কৰিব পাৰি যেনে—

$$\text{বিচ্যুতি মাধ্য } \bar{d} = \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$$

$$\text{গতিকে, } \bar{d} = \frac{\Sigma f_i (x_i - a)}{\Sigma f_i}$$

$$= \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} - \frac{\Sigma f_i a}{\Sigma f_i}$$

$$= \bar{x} - a \frac{\Sigma f_i}{\Sigma f_i}$$

$$= \bar{x} - a$$

$$\text{গতিকে, } \bar{x} = a + \bar{d}$$

$$\text{অর্থাৎ, } \bar{x} = a + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$$

তালিকা 14.4 ৰ পৰা a , $\Sigma f_i d_i$ আৰু Σf_i ৰ মান বহুৱাই পাওঁ—

$$\bar{x} = 47.5 + \frac{435}{30} = 47.5 + 14.5 = 62.$$

গতিকে, ছাত্ৰসকলে লাভ কৰা নম্বৰৰ মাধ্য হ'ল 62.

ওপৰত আলোচনা কৰা পদ্ধতিটোক বিবেচিত মাধ্য পদ্ধতি (Assumed Mean Method) বোলা হয়।

কাৰ্য্য 1 : তালিকা 14.3ৰ প্ৰতিটো x_i (অৰ্থাৎ, 17.5, 32.5, আৰু এনেকৈয়ে) 'a' বুলি ধৰি মাধ্য উলিওৱা। তুমি কি দেখিলা? তুমি দেখিবা যে প্ৰত্যেক বাৰতে নিৰ্ণয় কৰা মাধ্য একে অৰ্থাৎ 62 (কিয়?)

গতিকে, আমি ক'ব পাৰোঁ যে, মাধ্যৰ মান বাছি লোৱা 'a' ৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ নকৰে।

এইটো দেখা যায় যে, তালিকা 14.4ত চতুৰ্থ স্তম্ভত মানবোৰ 15ৰ গুণিতক। গতিকে যদি আমি সম্পূৰ্ণ স্তম্ভটোকে 15 ৰে হৰণ কৰোঁ, আমি f_i ৰ লগত পূৰণ কৰা ৰাশিবোৰ সৰুকৈ পাম (ইয়াত 15 প্ৰতিটো শ্ৰেণী অন্তৰালৰ শ্ৰেণী দৈৰ্ঘ্য)।

গতিকে, ধৰো $u_i = \frac{x_i - a}{h}$, য'ত a হ'ল বিবেচিত মাধ্য আৰু h শ্ৰেণীদৈৰ্ঘ্য।

এতিয়া, আমি u_i বোৰ এইদৰে গণনা কৰিম আৰু আগৰ দৰে আগ বাঢ়িম। (অৰ্থাৎ, $f_i u_i$ আৰু $\Sigma f_i u_i$ উলিয়াম)। $h = 15$ লৈ তালিকা 14.5 গঠন কৰোঁহক—

তালিকা 14.5

শ্ৰেণীঅন্তৰাল	f_i	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
10 - 25	2	17.5	-30	-2	-4
25 - 40	3	32.5	-15	-1	-3
40 - 55	7	47.5	0	0	0
55 - 70	6	62.5	15	1	6
70 - 85	6	77.5	30	2	12
85 - 100	6	92.5	45	3	18
মুঠ	$\Sigma f_i = 30$				$\Sigma f_i u_i = 29$

$$\text{ধৰোঁ } \bar{u} = \frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}$$

এতিয়া আকৌ \bar{u} আৰু \bar{x} ৰ মাজৰ সম্বন্ধ নিৰ্ণয় কৰোঁহক।

আমি পাওঁ যে, $u_i = \frac{x_i - a}{h}$

$$\begin{aligned}\text{সেয়ে, } \bar{u} &= \frac{\sum f_i \left(\frac{x_i - a}{h} \right)}{\sum f_i} \\ &= \frac{1}{h} \left[\frac{\sum f_i (x_i - a)}{\sum f_i} \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\frac{\sum f_i x_i - a \sum f_i}{\sum f_i} \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - a \frac{\sum f_i}{\sum f_i} \right] \\ &= \frac{1}{h} [\bar{x} - a]\end{aligned}$$

গতিকে, $h\bar{u} = \bar{x} - a$

অৰ্থাৎ, $\bar{x} = a + h\bar{u} = a + h \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right)$

এতিয়া তালিকা 14.5 ৰ পৰা a , h , $\sum f_i u_i$ আৰু $\sum f_i$ ৰ মান বহুৱাই আমি পাওঁ—

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 47.5 + 15 \times \left(\frac{29}{30} \right) \\ &= 47.5 + 14.5 = 62\end{aligned}$$

গতিকে, এজন ছাত্ৰই পোৱা মাধ্যম নম্বৰ হ'ল 62.

ওপৰত আলোচনা কৰা পদ্ধতি ট্যাপ-বিচ্যুতি পদ্ধতি (Step-deviation method) বুলি কোৱা হয়।

আমি লক্ষ্য কৰোঁ :

- যদি সকলো d_i ৰ এটা সাধাৰণ উৎপাদক থাকে তেন্তে ট্যাপ-বিচ্যুতি পদ্ধতি বেছি সুবিধাজনক হয়।
- তিনিওটা পদ্ধতিৰে নিৰ্ণয় কৰা মাধ্যম সমান।
- বিবেচিত মাধ্যম পদ্ধতি আৰু ট্যাপ বিচ্যুতি পদ্ধতি প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতিৰ সৰলীকৃত ৰূপহে মাথোঁ।

- a আৰু h ওপৰত দিয়া ধৰণে নহ'লেও $\bar{x} = a + h\bar{u}$ প্রযোজ্য হ'ব, কিন্তু যিকোনো অশূন্য সংখ্যা যাতে $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ হ'ব লাগিব।

এই পদ্ধতিকেইটা আন এটা উদাহৰণত প্ৰয়োগ কৰোঁহক—

উদাহৰণ 2 : ভাৰতৰ বিভিন্ন ৰাজ্য বা কেন্দ্ৰীয় শাসিত অঞ্চলৰ (U. T.) গ্ৰাম্য এলেকাৰ প্ৰাথমিক বিদ্যালয়ত শিক্ষয়িত্ৰী বৰ্গত শতাংশত তলৰ তালিকাত সন্নিৱিষ্ট কৰা হৈছে। শিক্ষয়িত্ৰীৰ মাধ্য শতাংশ এই অনুচ্ছেদত ব্যাখ্যা কৰা তিনিওটা পদ্ধতিৰে নিৰ্ণয় কৰা।

শিক্ষয়িত্ৰীৰ শতাংশ	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75	75-85
ৰাজ্য/ কেন্দ্ৰীয় শাসিত অঞ্চলৰ সংখ্যা	6	11	7	4	4	2	1

উৎস : NCERTৰ দ্বাৰা প্ৰস্তুত কৰা সপ্তম সৰ্বভাৰতীয় (বিদ্যালয়) স্কুলীয়া শিক্ষাৰ অধ্যয়ন

সমাধান : প্ৰতিটো শ্ৰেণী অন্তৰালৰ শ্ৰেণীসূচক x_i নিৰ্ণয় কৰি এটা স্তম্ভত লিখা হওঁক।

তালিকা 14.6

শিক্ষয়িত্ৰীৰ সংখ্যা	ৰাজ্য/ কেন্দ্ৰীয় শাসিত অঞ্চলৰ সংখ্যা (f_i)	x_i
15 - 25	6	20
25 - 35	11	30
35 - 45	7	40
45 - 55	4	50
55 - 65	4	60
65 - 75	2	70
75 - 85	1	80

ইয়াত আমি লওঁ $a = 50$, $h = 10$, তেন্তে $d_i = x_i - 50$ আৰু $u_i = \frac{x_i - 50}{10}$ ।

আমি এতিয়া d_i আৰু u_i উলিয়াম আৰু ইয়াক তালিকা 14.7 ত বহুৱাম।

তালিকা 14.7

শিক্ষয়িত্ৰীৰ শতাংশ	ৰাজ্য/কেন্দ্ৰীয় শাসিত অঞ্চল সংখ্যা (f_i)	x_i	$d_i = x_i - 50$	$u_i = \frac{x_i - 50}{10}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
15 - 25	6	20	-30	-3	120	-180	-18
25 - 35	11	30	-20	-2	330	-220	-22
35 - 45	7	40	-10	-1	280	-70	-7
45 - 55	4	50	0	0	200	0	0
55 - 65	4	60	10	1	240	40	4
65 - 75	2	70	20	2	140	40	4
75 - 85	1	80	30	3	80	30	3
মুঠ	35				1390	-360	-36

ওপৰৰ তালিকাৰ পৰা আমি পাওঁ—

$$\sum f_i = 35, \quad \sum f_i x_i = 1390, \quad \sum f_i d_i = -360, \quad \sum f_i u_i = -36.$$

প্রত্যক্ষ পদ্ধতিৰে,

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1390}{35} = 39.71$$

বিবেচিত মাধ্য পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি,

$$\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = 50 + \frac{(-360)}{35} = 39.71$$

ঢাপ বিচ্যুতি পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি,

$$\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right) \times h = 50 + \left(\frac{-36}{35} \right) \times 10 = 39.71$$

সেয়ে গ্রাম্য অঞ্চলৰ প্ৰাথমিক বিদ্যালয়ক শিক্ষয়িত্ৰীৰ মাধ্য শতাংশ হ'ল 39.71.

মন্তব্য : তিনিওটা পদ্ধতিৰে নিৰ্ণয় কৰা (মাধ্য) ফলাফল একে। সেয়ে x_i আৰু f_i ৰ সাংখ্যিক মানৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰি পদ্ধতি নিৰ্বাচন কৰিব লাগে। যদি x_i আৰু f_i পৰ্যাপ্ত পৰিমাণে সৰু, তেন্তে প্রত্যক্ষ পদ্ধতিয়েই উপযুক্ত বাছনি। যদি x_i আৰু f_i সাংখ্যিক মানবোৰ ডাঙৰ তেন্তে আমি বিবেচিত গড় পদ্ধতি বা ঢাপ বিচ্যুতি পদ্ধতি ল'ব পাৰোঁ। যদি শ্ৰেণী অন্তৰালৰ শ্ৰেণীদৈৰ্ঘ্য সমান নহয় আৰু x_i ৰ সাংখ্যিকমান ডাঙৰ তেতিয়াও আমি ঢাপবিচ্যুতি পদ্ধতি প্ৰয়োগ কৰিব পাৰোঁ, এইক্ষেত্ৰত সকলো

d_i ৰ উৎপাদক হোৱা এটা উপযুক্ত h বাছি ল'ব লাগে।

উদাহৰণ 3 : তলৰ বৰ্ণনত এদিনীয়া ক্ৰিকেট খেলত এটা বলাৰে লোৱা উইকেট দেখুওৱা হৈছে। এটা উপযুক্ত পদ্ধতি বাছি লৈ উইকেটৰ মাধ্য নিৰ্ণয় কৰা। মাধ্যই কি সূচায়?

উইকেটৰ সংখ্যা	20 - 60	60 - 100	100 - 150	150 - 250	250 - 350	350 - 450
বলাৰ সংখ্যা	7	5	16	12	2	3

সমাধান : ইয়াত, শ্ৰেণীদৈৰ্ঘ্য ভিন্ন আৰু x_i ৰ মানবোৰ ডাঙৰ। তথাপিও আমি বিচ্যুতি প্ৰয়োগ কৰিম, $a = 200$ আৰু $h = 20$ । তেন্তে আমি তালিকা 14.8ৰ দৰে তথ্য পাম।

তালিকা 14.8

উইকেটৰ সংখ্যা	বলাৰ সংখ্যা (f_i)	x_i	$d_i = x_i - 200$	$u_i = \frac{d_i}{20}$	$u_i f_i$
20 - 60	7	40	-160	-8	-56
60 - 100	5	80	-120	-6	-30
100 - 150	16	125	-75	-3.75	-60
150 - 250	12	200	0	0	0
250 - 350	2	300	100	5	10
350 - 450	3	400	200	10	30
মুঠ	45				-106

গতিকে, $\bar{u} = \frac{-106}{45}$ । সেইবাবে, $\bar{x} = 200 + 20 \left(\frac{-106}{45} \right) = 200 - 47.11 = 152.89$ ।

এইটোৱে কয় যে, গড়ে প্ৰদত্ত 45 টা বলাৰে এদিনীয়া ক্ৰিকেটত দখল কৰা উইকেটৰ সংখ্যা হ'ল 152.89।

এতিয়া, এই অনুচ্ছেদত আলোচনা কৰা ধাৰণাবোৰ তোমালোকে কিদৰে সুন্দৰভাৱে প্ৰয়োগ কৰিব পাৰা চোৱাচোনহু

কাৰ্য্য 2 : তোমালোকৰ শ্ৰেণীৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকল তিনিটা দলত বিভক্ত হোৱা আৰু প্ৰত্যেক দলক তলৰ যিকোনো এটা কাৰ্য্য কৰিবলৈ কোৱা।

1. তোমালোকৰ বিদ্যালয়ে অনুষ্ঠিত কৰা শেহতীয়া পৰীক্ষাত তোমালোকৰ শ্ৰেণীৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলে লাভ কৰা গণিতৰ নম্বৰসমূহ সংগ্ৰহ কৰা। তথ্যসমূহৰপৰা সংঘবদ্ধ বাৰংবাৰতা বিভাজন গঠন কৰা।
2. তোমালোকৰ চহৰখনৰ দৈনিক সৰ্বোচ্চ তাপমান 30 দিনৰ বাবে লিখি ৰাখা। এই তথ্যখিনি সংঘবদ্ধ বাৰংবাৰতা তালিকাত উপস্থাপন কৰা।
3. তোমালোকৰ শ্ৰেণীৰ সকলো ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ উচ্চতা (চেঃমিঃত) জুখি উলিওৱা আৰু তথ্যখিনি এখন বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকাত প্ৰকাশ কৰা।

আটাইকেইটা দলে তথ্যসমূহ আহৰণ কৰি আৰু সংঘবদ্ধ বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকাত সন্নিৱিষ্ট কৰি দলসমূহে প্ৰত্যেক ক্ষেত্ৰতে মাধ্য নিৰ্ণয় কৰিব পাৰে, যি পদ্ধতি উপযুক্ত বুলি ভাবে সেয়া প্ৰয়োগ কৰিব।

অনুশীলনী 14.1

1. এদল ছাত্ৰই তেওঁলোকৰ পৰিৱেশ সজাগতা কাৰ্যসূচীৰ অংশহিচাপে এটা অঞ্চলৰ 20টা ঘৰত থকা উদ্ভিদৰ তথ্য ভিত্তিক অধ্যয়ন তলত দেখুওৱা তথ্য সমূহ সংগ্ৰহিত কৰিলে। প্ৰতিটো ঘৰত থকা উদ্ভিদৰ মাধ্য উলিওৱা।

উদ্ভিদৰ সংখ্যা	0 - 2	2 - 4	4 - 6	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 - 14
ঘৰৰ সংখ্যা	1	2	1	5	6	2	3

তোমালোকে মাধ্য উলিয়াবলৈ কোনটো পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰিবা আৰু কিয়?

2. এটা ফেব্ৰুৱাৰীৰ 50 জন শ্ৰমিকৰ (কৰ্মীৰ) দৈনিক পাৰিশ্ৰমিক হ'ল তলৰ বাণ্টন

দৈনিক পাৰিশ্ৰমিক (টকাত)	100 - 120	120 - 140	140 - 160	160 - 180	180 - 200
কৰ্মীৰ সংখ্যা	12	14	8	6	10

উপযুক্ত পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি ফেব্ৰুৱাৰীটোৰ শ্ৰমিকৰ মাধ্য দৈনিক পাৰিশ্ৰমিক নিৰ্ণয় কৰা।

3. এটা অঞ্চলৰ শিশুসকলৰ দৈনিক (পকেট) খৰচ তলৰ বিভাজন তালিকাত দেখুৱা হ'ল। মাধ্য হাতখৰচ হ'ল 18টকা। হেৰোৱা বাৰংবাৰতা f নিৰ্ণয় কৰা।

দৈনিক হাত খৰচ (টকাত)	11 - 13	13 - 15	15 - 17	17 - 19	19 - 21	21 - 23	23 - 25
শিশুৰ সংখ্যা	7	6	9	13	f	5	4

4. এখন চিকিৎসালয়ত এজন চিকিৎসকে 30 গৰাকী মহিলাক পৰীক্ষা কৰে আৰু প্ৰতি মিনিটত

হৃৎপিণ্ডৰ কম্পন সংখ্যা লিখি ৰাখে আৰু তলত দিয়াধৰণে তালিকাবদ্ধ কৰে। উপযুক্ত পদ্ধতি বাছনি কৰি, এই মহিলাসকলৰ প্ৰতিমিনিটত হৃৎপিণ্ডৰ মাধ্য কম্পন নিৰ্ণয় কৰা।

প্ৰতি মিনিটত হৃৎপিণ্ডৰ কম্পন সংখ্যা	65-68	68-71	71-74	74-77	77-80	80-83	83-86
মহিলাৰ সংখ্যা	2	4	3	8	7	4	2

5. খুচুৰা বজাৰত ফলবিক্ৰেতাই আমবোৰ বাকছত ভৰাই বিক্ৰী কৰে। এই বাকচসমূহত ভিন্ন পৰিমাণৰ আম আছে। বাকচৰ সংখ্যা ক্ৰমে আমৰ পৰিমাণ তলত বিস্তৃত কৰি দিয়া হ'ল।

আমৰ সংখ্যা	50 - 52	53 - 55	56 - 58	59 - 61	62 - 64
বাকচৰ সংখ্যা	15	110	135	115	25

এটা বন্ধ বাকচত থকা আমৰ মাধ্য নিৰ্ণয় কৰা। মাধ্য উলিয়াবলৈ তুমি কি পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰিবা ?

6. এটা অঞ্চলৰ 25 ঘৰ মানুহৰ খাদ্যত দৈনিক খৰচ তলৰ তালিকাত দেখুওৱা হৈছে।

দৈনিক খৰচ (টকাত)	100 - 150	150 - 200	200 - 250	250 - 300	300 - 350
ঘৰৰ সংখ্যা	4	5	12	2	2

উপযুক্ত নিয়মেৰে খাদ্যত দৈনিক মাধ্য খৰচ নিৰ্ণয় কৰা।

7. বায়ুত SO_2 ৰ গাঢ়তা উলিয়াবলৈ (প্ৰতিমিলিয়ন অংশত, অৰ্থাৎ ppm) এখন চহৰৰ 30 টা অঞ্চলত তথ্য সংগ্ৰহ কৰা হ'ল আৰু তলত দিয়া ধৰণে উপস্থাপন কৰা হ'ল—

SO_2 ৰ গাঢ়তা (ppm)	বাৰংবাৰতা
0.00 - 0.04	4
0.04 - 0.08	9
0.08 - 0.12	9
0.12 - 0.16	2
0.16 - 0.20	4
0.20 - 0.24	2

বায়ুত SO_2 ৰ মাধ্য গাঢ়তা নিৰ্ণয় কৰা।

8. সম্পূৰ্ণ শৈক্ষিক বৰ্ষত এটা শ্ৰেণীত এজন শিক্ষকে লোৱা 40 জন ছাত্ৰৰ অনুপস্থিতিৰ হিচাপ

তলত দিয়া হ'ল। এজন ছাত্ৰৰ অনুপস্থিতিৰ মাধ্য দিন নিৰ্ণয় কৰা।

দিনৰ সংখ্যা	0 - 6	6 - 10	10 - 14	14 - 20	20 - 28	28 - 38	38 - 40
ছাত্ৰৰ সংখ্যা	11	10	7	4	4	3	1

9. তলৰ তালিকাখনে 35 খন চহৰৰ সাক্ষৰতা হাৰ (শতাংশত) দিয়ে। মাধ্য সাক্ষৰতা হাৰ নিৰ্ণয় কৰা।

সাক্ষৰতা হাৰ (%ত)	45 - 55	55 - 65	65 - 75	75 - 85	85 - 95
চহৰৰ সংখ্যা	3	10	11	8	3

14.3. সংঘবদ্ধ তথ্যৰ বহুলক (Mode of Grouped Data) :

নৱম শ্ৰেণীৰ কথা মনত পেলোৱা— পৰ্যবেক্ষণ এটাৰ যিটো মান আটাইতকৈ বেছি উপলব্ধ হয় সেয়াই হ'ল বহুলক অৰ্থাৎ পৰ্যবেক্ষণটোৰ যিটো মানৰ বাৰংবাৰতা সৰ্বোচ্চ। তদুপৰি সংঘবদ্ধ নোহোৱা তথ্যৰ বহুলক নিৰ্ণয় সম্বন্ধেও আলোচনা কৰিছিলো। ইয়াত সংঘবদ্ধ তথ্যৰ বহুলক নিৰ্ণয় সম্পৰ্কে আমি আলোচনা কৰিম। যদি সম্ভৱ হয়, সেয়া এটাতকৈ বেছি মানৰ সৰ্বোচ্চ বাৰংবাৰতা থাকিব পাৰে। এই পৰিস্থিতিত তথ্যসমূহক বহু বহুলকযুক্ত বোলে। যদিও সংঘবদ্ধ তথ্য বহুবহুলক (multimodal) যুক্ত হ'ব পাৰে, আমি একক বহুলকযুক্ত তথ্যৰ সমস্যাতে আৱদ্ধ থাকিম।

তলৰ উদাহৰণটোৰ জৰিয়তে আমি সংঘবদ্ধ নোহোৱা তথ্যৰ বহুলক কিদৰে নিৰ্ণয় কৰে তাক মনত পেলাওঁ—

উদাহৰণ 4 : এটা বলাৰে 10 খন ক্ৰিকেট খেলত দখল কৰা উইকেটৰ সংখ্যা তলত দিয়া ধৰণৰ—
 2 6 4 5 0 2 1 3 2 3

তথ্যখিনিৰ বহুলক (Mode) নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান : প্ৰদত্ত তথ্যৰ বাৰংবাৰতা তালিকা তলত দিয়া হ'ল—

উইকেটৰ সংখ্যা	0	1	2	3	4	5	6
খেলৰ সংখ্যা	1	1	3	2	1	1	1

স্পষ্টভাৱে 2 টা উইকেট দখল কৰা খেলৰ সংখ্যা সৰ্বোচ্চ (অৰ্থাৎ 3)। সেয়ে তথ্যৰ বহুলক হ'ল '2'।

সংঘবদ্ধ বাৰংবাৰতা বিভাজনত বাৰংবাৰতা চাই বহুলক (Mode) নিৰ্ণয় কৰাটো সম্ভৱ নহয়।

ইয়াত আমি মাথো সৰ্বোচ্চ বাৰংবাৰতায়ুক্ত শ্ৰেণীটোহে দেখুৱাব পাৰো, যাক বহুলক শ্ৰেণী (Modal class) বোলে। বহুলক, বহুলক শ্ৰেণীৰ ভিতৰৰ এটা মান আৰু এইটো তলৰ সূত্ৰই দিয়ে—

$$\text{বহুলক} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h$$

য'ত l = বহুলক শ্ৰেণীৰ নিম্নসীমা

h = শ্ৰেণী অন্তৰালৰ দৈৰ্ঘ্য (সকলো শ্ৰেণী দৈৰ্ঘ্য একে বুলি ধৰা হৈছে)

f_1 = বহুলক শ্ৰেণীৰ বাৰংবাৰতা।

f_0 = বহুলক শ্ৰেণীৰ পূৰ্ববৰ্তী শ্ৰেণীৰ বাৰংবাৰতা।

f_2 = বহুলক শ্ৰেণীৰ পৰবৰ্তী শ্ৰেণীৰ বাৰংবাৰতা।

এই সূত্ৰৰ ব্যৱহাৰ ব্যাখ্যা কৰিবলৈ তলৰ উদাহৰণটো লোৱা হওক—

উদাহৰণ- 5 : এটা ছাত্ৰৰ দলে এটা অঞ্চলৰ 20 টা পৰিয়ালৰ তথ্যভিত্তিক অধ্যয়ন কৰি পৰিয়ালৰ সদস্যৰ সংখ্যা সন্নিবিষ্ট কৰি তলৰ বাৰংবাৰতা তালিকা প্ৰস্তুত কৰিলে।

পৰিয়ালৰ আকাৰ	1 - 3	3 - 5	5 - 7	7 - 9	9 - 11
পৰিয়ালৰ সংখ্যা	7	8	2	2	1

এই তথ্যৰ বহুলক নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান : ইয়াত সৰ্বোচ্চ বাৰংবাৰতা 8 আৰু এই বাৰংবাৰতাৰ অনুৰূপ শ্ৰেণী হ'ল 3 - 5।

গতিকে বহুলক শ্ৰেণী হ'ল 3 - 5।

এতিয়া বহুলক শ্ৰেণী = 3 - 5, বহুলক শ্ৰেণীৰ নিম্নসীমা (l) = 3, শ্ৰেণী দৈৰ্ঘ্য (h) = 2

বহুলক শ্ৰেণীৰ বাৰংবাৰতা (f_1) = 8,

বহুলক শ্ৰেণীৰ পূৰ্ববৰ্তী শ্ৰেণীৰ বাৰংবাৰতা (f_0) = 7,

বহুলক শ্ৰেণীৰ পৰবৰ্তী শ্ৰেণীৰ বাৰংবাৰতা (f_2) = 2.

এতিয়া, মানবোৰ সূত্ৰটোত বহুৱাই আমি পাওঁ—

$$\text{বহুলক} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h = 3 + \left(\frac{8 - 7}{2 \times 8 - 7 - 2} \right) \times 2 = 3 + \frac{2}{7} = 3.286$$

সেইবাবে, ওপৰৰ তথ্যৰ বহুলক হ'ল 3.286.

উদাহৰণ- 6 : উদাহৰণ-1 ৰ তালিকা 14.3 ত 30 জন ছাত্ৰই পৰীক্ষাত অংকত পোৱা নম্বৰ সন্নিবিষ্ট কৰা হৈছে। এই তথ্যৰ বহুলক নিৰ্ণয় কৰা। মাধ্য আৰু বহুলকৰ তুলনা আৰু বৈশিষ্ট্যও লিখা।

সমাধান : উদাহৰণ-1 ৰ তালিকা 14.3 চোৱা। যিহেতু সৰ্বহ সংখ্যক ছাত্ৰই (অৰ্থাৎ 7) 40-55

অন্তৰালত নম্বৰ পাইছিল, বহুলক শ্ৰেণী হ'ল 40-55।

সেয়ে, বহুলক শ্ৰেণীৰ নিম্নসীমা (l) = 40,

শ্ৰেণীদৈৰ্ঘ্য (h) = 15,

বহুলক শ্ৰেণীৰ বাৰংবাৰতা (f_1) = 7,

বহুলক শ্ৰেণীৰ পূৰ্ববৰ্তী শ্ৰেণীৰ বাৰংবাৰতা (f_0) = 3,

বহুলক শ্ৰেণীৰ পৰবৰ্তী শ্ৰেণীৰ বাৰংবাৰতা (f_2) = 6.

এতিয়া সূত্র ব্যৱহাৰ কৰি, বহুলক = $l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h$,

আমি পাওঁ, বহুলক = $40 + \left(\frac{7 - 3}{14 - 6 - 3} \right) \times 15 = 52$

সেয়ে বহুলক নম্বৰ হ'ল 52। এতিয়া উদাহৰণ-1 ৰ পৰা জানো যে মাধ্য নম্বৰ = 62

গতিকে, সৰহ সংখ্যক ছাত্ৰই 52 নম্বৰ পাইছিল আৰু গড় হিচাপত নম্বৰ পাইছিল 62।

মন্তব্য :

1. উদাহৰণ-6 ত বহুলক, মাধ্যমানতকৈ কম। কিন্তু অন্য সমস্যাত ই মাধ্যৰ সমান বা বেছিও হ'ব পাৰে।
2. পৰিস্থিতি সাপেক্ষে, আমি ছাত্ৰসকলে লাভ কৰা গড় নম্বৰ নিৰ্ণয় কৰিবলৈ আগ্ৰহী নে সৰহ সংখ্যক ছাত্ৰই লাভ কৰা গড় নম্বৰ নিৰ্ণয় কৰিম? প্ৰথম ক্ষেত্ৰত মাধ্য দৰকাৰ আৰু দ্বিতীয় ক্ষেত্ৰত বহুলক দৰকাৰ।

কাৰ্য্য 3 : কাৰ্য্য 2ৰ দলসমূহ একে ৰাখি আৰু একে অৱস্থাৰ লগত জড়িত কৰি ৰখা হ'ল। দলকেইটাক তথ্যসমূহৰ বহুলক নিৰ্ণয় কৰিবলৈ কোৱা হ'ল। তেওঁলোকে ইয়াক মাধ্য মানৰ লগত তুলনা কৰিব লাগিব আৰু দুয়োটাৰ অৰ্থ দাঙি ধৰিব লাগিব।

মন্তব্য : অসমান শ্ৰেণীদৈৰ্ঘ্যৰ সংঘবদ্ধ তথ্যৰ বহুলকো নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি। অৱশ্যে আমি ইয়াক আলোচনা নকৰোঁক।

অনুশীলনী: 14.2.

1. এবছৰত এখন চিকিৎসালয়ত ভৰ্তি হোৱা ৰোগীৰ বয়স তলৰ তালিকাত দেখুওৱা হ'ল—

বয়স (বছৰ)	5 - 15	15 - 25	25 - 35	35 - 45	45 - 55	55 - 65
ৰোগীৰ সংখ্যা	6	11	21	23	14	5

ওপৰত দিয়া তথ্যৰ মাধ্য আৰু বহুলক উলিওৱা। দুয়োটা কেন্দ্ৰীয় মাপৰ তুলনা কৰা আৰু তাৎপৰ্য ব্যাখ্যা কৰা।

2. তলৰ তথ্যসমূহে 225 টা বৈদ্যুতিক উপাদানৰ পৰ্য্যবেক্ষণৰ দ্বাৰা উপলব্ধ আয়ুস (ঘণ্টাত) নিৰূপণ কৰে।

আয়ুস (ঘণ্টাত)	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100	100 - 120
বাৰংবাৰতা	10	35	52	61	38	29

উপাদানসমূহৰ বহুলক আয়ুস নিৰ্ণয় কৰা।

3. এখন গাঁৱৰ 200 টা পৰিয়ালৰ মাহেকীয়া খৰচৰ তালিকাত সন্নিৱিষ্ট কৰা হৈছে। পৰিয়ালকেইটাৰ মাহেকীয়া খৰচৰ বহুলক নিৰ্ণয় কৰা। মাহেকীয়া খৰচৰ মাধ্যম নিৰ্ণয় কৰা।

খৰচ (টকাত)	পৰিয়ালৰ সংখ্যা
1000 - 1500	24
1500 - 2000	40
2000 - 2500	33
2500 - 3000	28
3000 - 3500	30
3500 - 4000	22
4000 - 4500	16
4500 - 5000	7

4. তলৰ তথ্যসমূহে ভাৰতৰ বিভিন্ন ৰাজ্যৰ উচ্চতৰ মাধ্যমিক বিদ্যালয়ত শিক্ষক-ছাত্ৰৰ অনুপাত নিৰ্ণয় কৰিছে। এই তথ্যৰ বহুলক আৰু মাধ্যম নিৰ্ণয় কৰা। দুয়োটা মাপৰ তাৎপৰ্য্য লিখা।

এজন শিক্ষকৰ বিপৰীতে ছাত্ৰৰ সংখ্যা	ৰাজ্যৰ সংখ্যা/U.T.
15 - 20	3
20 - 25	8
25 - 30	9
30 - 35	10
35 - 40	3
40 - 45	0
45 - 50	0
50 - 55	2

5. বিশ্বৰ কেইজনমান শীৰ্ষ পৰ্য্যায়ৰ ক্ৰিকেটাৰে আন্তঃ ৰাষ্ট্ৰীয় এদিনীয়া খেলত কৰা ৰানৰ সংখ্যা তলত সন্নিৱিষ্ট কৰি দেখুওৱা হ'ল—

ৰানৰ সংখ্যা	বেট্‌চমেনৰ সংখ্যা
3000 - 4000	4
4000 - 5000	18
5000 - 6000	9
6000 - 7000	7
7000 - 8000	6
8000 - 9000	3
9000 - 10000	1
10000 - 11000	1

তথ্যৰ বহুলক উলিওৱা।

6. এজন ছাত্ৰই 3 মিনিটৰ মূৰে মূৰে এটা ৰাস্তাৰ কোনো এটা ঠাইৰ মাজেৰে পাৰ হোৱা গাড়ীৰ সংখ্যা লিখি ৰাখি কাৰ্যটো 100 বাৰ সমাপন কৰি তলৰ তালিকাত উপস্থাপন কৰিলে তথ্যৰ বহুলক নিৰ্ণয় কৰা :

গাড়ীৰ সংখ্যা	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
বাৰংবাৰতা	7	14	13	12	20	11	15	8

14.4. সংঘবদ্ধ তথ্যৰ মধ্যমা (Median of Grouped Data) :

তোমালোকে নৱম শ্ৰেণীত পঢ়ি আহিছা যে, মধ্যমা হ'ল কেন্দ্ৰীয় মাপ যি তথ্যৰ একেবাৰে মধ্যম পৰ্য্যবেক্ষণৰ মান নিৰূপণ কৰে। মনত পেলোৱা যে, সংঘবদ্ধ নোহোৱা তথ্যৰ মধ্যমা নিৰ্ণয় কৰিবলৈ আমি প্ৰথমে পৰ্য্যবেক্ষণ কৰা মানবোৰ উৰ্দ্ধক্ৰমত সজাই লওঁ। তেতিয়া যদি n অযুগ্ম,

মধ্যমা হ'ল $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ তম পৰ্য্যবেক্ষণ। আৰু যদি n যুগ্ম, তেন্তে মধ্যমা $\frac{n}{2}$ তম আৰু $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$ তম পৰ্য্যবেক্ষণৰ গড়।

ধৰা হওক আমি তলৰ তথ্যখিনিৰ মধ্যমা উলিয়াব লাগে য'ত এটা টেষ্টত 100 জন ছাত্ৰই 50 ৰ ভিতৰত পোৱা নম্বৰবোৰ দিয়া আছে।

লাভ কৰা নম্বৰ	20	29	28	33	42	38	43	25
ছাত্ৰৰ সংখ্যা	6	28	24	15	2	4	1	20

প্ৰথমে আমি নম্বৰবোৰ উৰ্দ্ধক্ৰমত সজাম আৰু তলত দিয়াধৰণে বাৰংবাৰতা তালিকা প্ৰস্তুত কৰিম।

তালিকা 14.9

লাভ কৰা নম্বৰ	ছাত্ৰৰ সংখ্যা (বাৰংবাৰতা)
20	6
25	20
28	24
29	28
33	15
38	4
42	2
43	1
মুঠ	100

ইয়াত $n = 100$, যিটো যুগ্ম। মধ্যমা হ'ব $\frac{n}{2}$ তম আৰু $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$ তম পৰ্য্যবেক্ষণৰ গড় অৰ্থাৎ

50তম আৰু 51তম পৰ্য্যবেক্ষণৰ গড়। এই পৰ্য্যবেক্ষণকেইটা উলিয়াবলৈ আমি তলত দিয়া ধৰণে আগবাঢ়িম :

তালিকা 14.10

লাভ কৰা নম্বৰ	ছাত্ৰৰ সংখ্যা
20	6
25 লৈ	$6 + 20 = 26$
28 লৈ	$26 + 24 = 50$
29 লৈ	$50 + 28 = 78$
33 লৈ	$78 + 15 = 93$
38 লৈ	$93 + 4 = 97$
42 লৈ	$97 + 2 = 99$
43 লৈ	$99 + 1 = 100$

এতিয়া আমি অন্য এটা স্তম্ভ সংযোগ কৰিম যাতে ওপৰৰ বাৰংবাৰতা তালিকাত এই তথ্য দিব পাৰোঁ আৰু ইয়াক সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা স্তম্ভ বুলি ক'ম।

তালিকা 14.11

লাভ কৰা নম্বৰ	ছাত্ৰৰ সংখ্যা	সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা
20	6	6
25	20	26
28	24	50
29	28	78
33	15	93
38	4	97
42	2	99
43	1	100

ওপৰৰ তালিকাৰ পৰা আমি পাওঁ :

50তম পৰ্য্যবেক্ষণ হ'ল 28 (কিয়?)

51তম পৰ্য্যবেক্ষণ হ'ল 29

$$\text{সেয়ে, মধ্যমা} = \frac{28 + 29}{2} = 28.5$$

মন্তব্য : তালিকা 14.11 ৰ আৰু 1নং স্তম্ভৰ 3নং স্তম্ভৰে গঠিত তালিকা অংশক সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা তালিকা বোলে। মধ্যমা নম্বৰ 28.5 এ এই তথ্যকে বহন কৰে যে, প্ৰায় 50% ছাত্ৰই 28.5 তকৈ কম নম্বৰ আৰু বাকী 50% ই 28.5 তকৈ বেচি নম্বৰ পাইছে।

এতিয়া কেনেকৈ সংঘবদ্ধ তথ্যৰ মধ্যমা নিৰ্ণয় কৰা হয় চোৱা যাওঁক। তলৰ অৱস্থাটো বিবেচনা কৰি—

তলত দিয়া দৰে, এটা পৰীক্ষাত 53 জন ছাত্ৰই 100 নম্বৰৰ ভিতৰত পোৱা নম্বৰসমূহৰ লগত বাৰংবাৰতা বিভাজন বিবেচনা কৰোঁহক।

তালিকা 14.12

নম্বৰ	ছাত্ৰৰ সংখ্যা
0 - 10	5
10 - 20	3
20 - 30	4
30 - 40	3
40 - 50	3
50 - 60	4
60 - 70	7
70 - 80	9
80 - 90	7
90 - 100	8

ওপৰৰ তালিকাৰপৰা তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিবলৈ চেষ্টা কৰা :

10 তকৈ কম নম্বৰ পোৱা ছাত্ৰৰ সংখ্যা কিমান? উত্তৰ হ'ব 5। কিমান ছাত্ৰই 20 তকৈ কম নম্বৰ পালে? এইটো লক্ষ্য কৰা যে, যিসকলে 20তকৈ কম নম্বৰ পালে তাৰ মাজত 0 - 10 ভিতৰত নম্বৰ পোৱা ছাত্ৰ আৰু যিসকলে 10 - 20 ভিতৰত নম্বৰ পালে তেওঁলোক অন্তৰ্ভুক্ত। গতিকে 20 তকৈ কম নম্বৰ পোৱা ছাত্ৰৰ সংখ্যা $5 + 3$ অৰ্থাৎ 8 জন। আমি কওঁ যে, 10 - 20 ৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা 8।

একেদৰে আমি অন্য শ্ৰেণীসমূহৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা নিৰ্ণয় কৰিব পাৰোঁ, অৰ্থাৎ 30 তকৈ কম, 40তকৈ কম,, 100 তকৈ কম নম্বৰ পোৱা ছাত্ৰৰ সংখ্যা। আমি সেইবোৰ তালিকা 14.13 ত উপস্থাপন কৰিছোঁ।

তালিকা 14.13

লাভ কৰা নম্বৰ	ছাত্ৰৰ সংখ্যা (সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা)
10তকৈ কম	5
20তকৈ কম	$5 + 3 = 8$
30তকৈ কম	$8 + 4 = 12$
40তকৈ কম	$12 + 3 = 15$
50তকৈ কম	$15 + 3 = 18$
60তকৈ কম	$18 + 4 = 22$
70তকৈ কম	$22 + 7 = 29$
80তকৈ কম	$29 + 9 = 38$
90তকৈ কম	$38 + 7 = 45$
100তকৈ কম	$45 + 8 = 53$

ওপৰত দিয়া বিভাজনক সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিভাজন, ‘(*)ত কৈ কম’ প্ৰকাৰ বুলি কোৱা হয়। ইয়াত 10, 20, 30, 100 আদি অনুৰূপ অন্তৰালৰ উচ্চ সীমা।

একেদৰে আমি 0ৰ সমান বা বেছি, 10ৰ সমান বা বেছি, 20ৰ সমান বা বেছি আৰু এনেকৈয়ে, নম্বৰ পোৱা ছাত্ৰৰ সংখ্যা তালিকাভুক্ত কৰিব পাৰোঁ। তালিকা 14.12ৰ পৰা পাওঁ যে, 53 জন ছাত্ৰৰ আটাইয়ে 0ৰ সমান বা বেছি নম্বৰ পাইছে। যিহেতু তাত 5 জন ছাত্ৰই 0 - 10 ৰ ভিতৰত নম্বৰ পাইছে, গতিকে তাত $53 - 5 = 48$ জন ছাত্ৰই 10 ৰ সমান বা বেছি নম্বৰ পাইছে। একেধৰণে আগবাঢ়ি আমি পাওঁ— 20 বা তাতকৈ বেছি নম্বৰ পোৱা ছাত্ৰৰ সংখ্যা $48 - 3 = 45$, 30 বা তাতকৈ বেছি নম্বৰ পোৱা ছাত্ৰৰ সংখ্যা $45 - 4 = 41$, আৰু এনেকৈয়ে তালিকা 14.14ত দিয়াৰ দৰে পাওঁ।

তালিকা 14.14

লাভ কৰা নম্বৰ	ছাত্ৰৰ সংখ্যা (সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা)
0 ৰ সমান বা বেছি	53
10 ৰ সমান বা বেছি	$53 - 5 = 48$
20 ৰ সমান বা বেছি	$48 - 3 = 45$
30 ৰ সমান বা বেছি	$45 - 4 = 41$
40 ৰ সমান বা বেছি	$41 - 3 = 38$
50 ৰ সমান বা বেছি	$38 - 3 = 35$
60 ৰ সমান বা বেছি	$35 - 4 = 31$
70 ৰ সমান বা বেছি	$31 - 7 = 24$
80 ৰ সমান বা বেছি	$24 - 9 = 15$
90 ৰ সমান বা বেছি	$15 - 7 = 8$

ওপৰৰ তালিকাখনক ‘(*) ৰ বেছি’ প্ৰকাৰৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিভাজন বোলা হয়। ইয়াত 0, 10, 20,, 90 এ অনুৰূপ অন্তৰালৰ নিম্নসীমাক সূচায়।

এতিয়া সংঘবদ্ধ তথ্যৰ মধ্যমা নিৰ্ণয় কৰিবলৈ আমি এই সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ যিকোনো এটাক ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰোঁ।

তালিকা 14.12 আৰু 14.13 ক লগ লগাই তালিকা 14.15 তলত দিয়া ধৰণে প্ৰস্তুত কৰোঁহক।

তালিকা 14.15

নম্বৰ	ছাত্ৰৰ সংখ্যা (f)	সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা (cf)
0 - 10	5	5
10 - 20	3	8
20 - 30	4	12
30 - 40	3	15
40 - 50	3	18
50 - 60	4	22
60 - 70	7	29
70 - 80	9	38
80 - 90	7	45
90 - 100	8	53

এতিয়া সংঘবদ্ধ তথ্যৰ মধ্যম পৰ্যবেক্ষণ আমি সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা চাই কব নোৱাৰোঁ কাৰণ মধ্যম পৰ্যবেক্ষণ এটা শ্ৰেণী অন্তৰালৰ কোনোবা এটা মান হ'ব পাৰে।

সেয়ে, এটা শ্ৰেণী অন্তৰালৰ ভিতৰত এনে এটা মান বিচাৰিব লাগে যাতে ই সম্পূৰ্ণ বিভাজনটোক সমানে দুটা ভাগত বিভক্ত কৰে। কিন্তু কোনটো শ্ৰেণী এইটো হ'ব?

এই শ্ৰেণীটো উলিয়াবলৈ আমি সকলো শ্ৰেণীৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা আৰু $\frac{n}{2}$ নিৰ্ণয় কৰিম। আমি

বাছি ল'ম এনে এটা শ্ৰেণী যাৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা $\frac{n}{2}$ তকৈ ডাঙৰ (আৰু নিচেই ওচৰৰ)। এই

শ্ৰেণীটোক মধ্যমা শ্ৰেণী বোলে। ওপৰৰ বিভাজনটোত $n = 53$, গতিকে $\frac{n}{2} = 26.5$ । এতিয়া

60 - 70 শ্ৰেণীটোৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা 29, $\frac{n}{2}$ তকৈ ডাঙৰ (আৰু নিচেই ওচৰৰ) অৰ্থাৎ 26.5ত কৈ ডাঙৰ।

সেইবাবে, 60 - 70 হ'ল মধ্যমা শ্ৰেণী।

মধ্যমা শ্ৰেণী নিৰূপণৰ পাছত আমি তলৰ সূত্ৰটো মধ্যমা উলিয়াবলৈ ব্যৱহাৰ কৰিম।

$$\text{মধ্যমা} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) \times h,$$

য'ত, l = মধ্যমা শ্রেণীৰ নিম্ন সীমা,

n = পর্যবেক্ষণৰ সংখ্যা

cf = মধ্যমা শ্রেণীৰ পূৰ্ববর্তী শ্রেণীৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা

f = মধ্যমা শ্রেণীৰ বাৰংবাৰতা,

h = শ্রেণী দৈৰ্ঘ্য (শ্রেণী দৈৰ্ঘ্যসমূহ সমান বুলি ধৰা হৈছে)

$\frac{n}{2} = 26.5$, $l = 60$, $cf = 22$, $f = 7$, $h = 10$ সূত্ৰত বহুৱাই আমি পাওঁ,

$$\text{মধ্যমা} = 60 + \left(\frac{26.5 - 22}{7} \right) \times 10$$

$$= 60 + \frac{45}{7}$$

$$= 66.4$$

গতিকে, প্ৰায় আধা সংখ্যক ছাত্ৰই 66.4 তকৈ কম আৰু বাকী আধাই 66.4 তকৈ বেছি নম্বৰ পাইছে।

উদাহৰণ 7 : এখন স্কুলৰ দশম শ্ৰেণীৰ 51 গৰাকী ছাত্ৰীৰ উচ্চতা (চেঃমিঃ) সন্দৰ্ভত এটি তথ্য ভিত্তিক অধ্যয়নত তলৰ তথ্য সমূহ পোৱা হ'ল :

উচ্চতা (চেঃমিঃ)	ছোৱালীৰ সংখ্যা
140 তকৈ কম	4
145 তকৈ কম	11
150 তকৈ কম	29
155 তকৈ কম	40
160 তকৈ কম	46
165 তকৈ কম	51

মধ্যমা উচ্চতা নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান : মধ্যমা উচ্চতা নিৰ্ণয় কৰিবলৈ মধ্যমা শ্ৰেণী আৰু তাৰ অনুৰূপ বাৰংবাৰতা উলিয়াব লাগিব।

প্ৰদত্ত বিভাজন '(*) তকৈ কম' প্ৰকাৰৰ, 140, 145, 150, ..., 165 এ অনুৰূপ শ্ৰেণী অন্তৰালৰ উচ্চসীমা দিয়ে। সেয়ে শ্ৰেণীসমূহ 140 তকৈ কম, 140 - 145, 145 - 150, ..., 160 - 165। দেখা যায় যে, প্ৰদত্ত বিভাজনত 4 জনী ছোৱালীৰ উচ্চতা 140 চে.মি.তকৈ কম। এতিয়া 11 জনী

ছোৱালীৰ উচ্চতা 145 তকৈ কম আৰু 4 জনীৰ উচ্চতা 140 তকৈ কম। সেইবাবে, 140 - 145 অন্তৰালত ছোৱালীৰ সংখ্যা হ'ব $11 - 4 = 7$, একেদৰে, 145 - 150 ত বাৰংবাৰতা, $29 - 11 = 18$, 150 - 155 ত এইটো হ'ব $40 - 29 = 11$ আৰু এনেকৈয়ে হৈ থাকিব। সেইবাবে, প্ৰদত্ত সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতায়ুক্ত বাৰংবাৰতা তালিকাখন হ'ল—

তালিকা 14.16

শ্ৰেণী অন্তৰাল	বাৰংবাৰতা	সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা
140 তকৈ কম	4	4
140 - 145	7	11
145 - 150	18	29
150 - 155	11	40
155 - 160	6	46
160 - 165	5	51

এতিয়া, $n = 51$ । গতিকে, $\frac{n}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$ । এই পৰ্যবেক্ষণটো 145 - 150 অন্তৰালত পৰিব।

সেয়ে, l (নিম্নসীমা) = 145,

cf (145 - 150 অন্তৰালৰ পূৰ্ববৰ্তী অন্তৰালৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা) = 11,

f (145 - 150 ৰ বাৰংবাৰতা) = 18,

h (অন্তৰালৰ দৈৰ্ঘ্য) = 5

$$\text{সূত্র ব্যৱহাৰ কৰি, মধ্যমা} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) \times h,$$

$$\therefore \text{মধ্যমা} = 145 + \left(\frac{25.5 - 11}{18} \right) \times 5$$

$$= 145 + \frac{72.5}{18}$$

$$= 149.03.$$

গতিকে ছোৱালীৰ মধ্যমা উচ্চতা হ'ল 149.03 চে.মি.

এইটো সূচায় যে, প্ৰায় 50% ছোৱালীৰ উচ্চতা এই উচ্চতাতকৈ কম আৰু 50% এই উচ্চতাতকৈ ওখ।

উদাহরণ- ৪ : তলৰ তথ্যৰ মধ্যমা হ'ল 525। x আৰু y ৰ মান উলিওৱা যদি মুঠ বাৰংবাৰতা 100।

শ্ৰেণী অন্তৰাল	বাৰংবাৰতা
0 - 100	2
100 - 200	5
200 - 300	x
300 - 400	12
400 - 500	17
500 - 600	20
600 - 700	y
700 - 800	9
800 - 900	7
900 - 1000	4

সমাধান :

শ্ৰেণী অন্তৰাল	বাৰংবাৰতা	সঞ্চয়ীবাৰংবাৰতা
0 - 100	2	2
100 - 200	5	7
200 - 300	x	$7 + x$
300 - 400	12	$19 + x$
400 - 500	17	$36 + x$
500 - 600	20	$56 + x$
600 - 700	y	$56 + x + y$
700 - 800	9	$65 + x + y$
800 - 900	7	$72 + x + y$
900 - 1000	4	$76 + x + y$

এইটো দিয়া আছে যে, $n = 100$

গতিকে, $76 + x + y = 100$, অৰ্থাৎ, $x + y = 24$

(1)

মধ্যমা দিয়া আছে, 525 যিটো 500 - 600 শ্ৰেণীত পৰে।

গতিকে, $l = 500$, $f = 20$, $cf = 36 + x$, $h = 100$

সূত্র ব্যৱহাৰ কৰি, মধ্যমা = $l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) h$.

$$525 = 500 + \left(\frac{50 - 36 - x}{20} \right) \times 100$$

অৰ্থাৎ, $525 - 500 = (14 - x) \times 5$

অৰ্থাৎ, $25 = 70 - 5x$

অৰ্থাৎ, $5x = 70 - 25 = 45$

গতিকে, $x = 9$

সেইবাবে (1) ৰ পৰা আমি পাওঁ, $9 + y = 24$

অৰ্থাৎ, $y = 15$

তোমালোকে, তিনিটা কেন্দ্ৰীয় মাপৰ বিষয়ে ইতিমধ্যে অধ্যয়ন কৰিলা। এতিয়া এটা বিশেষ প্ৰয়োজনত কোনটো আটাইতকৈ বেছি উপযুক্ত সেয়া আলোচনা কৰোঁহক।

মাধ্য হ'ল আটাইতকৈ বেছি সঘনাই ব্যৱহৃত কেন্দ্ৰীয় মাপ কিয়নো ই সকলো পৰ্য্যবেক্ষণকে সামৰি লয় আৰু চৰম মানৰ মাজত অৱস্থিত অৰ্থাৎ সম্পূৰ্ণ তথ্যৰ আটাইতকৈ ডাঙৰ আৰু আটাইতকৈ সৰুটোৰ মাজত অৱস্থিত। ই দুটা বা ততোধিক বিভাজনক তুলনা কৰাত সহায় কৰে। উদাহৰণস্বৰূপে বিভিন্ন স্কুলৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰী গড় (মাধ্য) ফলাফল তুলনা কৰি কোন স্কুলৰ কৃতকাৰ্য্যতা ভাল তাৰ সিদ্ধান্ত দিব পাৰি।

অৱশ্যে, চৰম মানে মাধ্যত প্ৰভাৱ পেলায়। উদাহৰণস্বৰূপে বাৰংবাৰতা বা বেছি পৰিমাণে প্ৰায় একে থকা শ্ৰেণীসমূহৰ মাধ্যই তথ্যসমূহক ভালদৰে প্ৰতিনিধিত্ব কৰে। কিন্তু, এটা শ্ৰেণীৰ বাৰংবাৰতা 2 (ধৰোঁ) আৰু আন পাচঁটাৰ বাৰংবাৰতা 20, 25, 20, 21, 18, তেন্তে মাধ্যমানে নিশ্চিতভাৱে তথ্যৰ চৰিত্ৰ প্ৰতিফলিত নকৰে। সেইবাবে এনে ক্ষেত্ৰত মাধ্য তথ্যৰ ভাল প্ৰতিনিধি নহয়।

যিবোৰ সংখ্যাত ব্যক্তিগত পৰ্য্যবেক্ষণৰ গুৰুত্ব কম আৰু আমি এটা 'বিশেষ' পৰ্য্যবেক্ষণ নিৰ্ণয় কৰিব বিচাৰোঁ, এইক্ষেত্ৰত মধ্যমা বেছি উপযোগী, যেনে— এজন শ্ৰমিকৰ বিশেষ উৎপাদনৰ হাৰ, এখন ৰাষ্ট্ৰৰ গড় মজুৰী আদি। এইবিলাকেই পৰিস্থিতি য'ত চৰম মান থাকিব পাৰে। গতিকে, মাধ্যতকৈ আমি মধ্যমাক বেছি ভাল কেন্দ্ৰীয় মাপ বুলি ধৰোঁ।

যিবোৰ পৰিস্থিতিত সঘন মানৰ বা আটাইতকৈ জনপ্ৰিয় বস্তুৰ স্থিতিৰ দৰকাৰ, বহুলক আটাইতকৈ উত্তম বাছনি যেনে, টি. ভি ত দেখা আটাইতকৈ জনপ্ৰিয় কাৰ্যসূচীটো বাছি উলিওৱা, আটাইতকৈ বেছি বিচৰা গ্ৰাহকৰ বস্তুটো, সৰহ সংখ্যক মানুহে ব্যৱহাৰ কৰা গাড়ীৰ ৰং আদি।

মন্তব্য :

1. তিনিওটা কেন্দ্রীয় মাপৰ মাজত এটা পৰিসাংখ্যিক সম্বন্ধ আছে :

$$3 \text{ মধ্যমা} = \text{বহুলক} + 2 \text{ মাধ্য}$$

2. ভিন্ন শ্রেণী দৈৰ্ঘ্যৰ সংঘবদ্ধ তথ্যৰ মধ্যমা উলিয়াব পাৰি। অৱশ্যে, আমি ইয়াত এইটো আলোচনা নকৰোঁ।

অনুশীলনী 14.3

1. এটা অঞ্চলৰ 68 জন গ্ৰাহকে মাহেকত খৰচ কৰা বিদ্যুতৰ বাৰংবাৰতা বিভাজন তলত দিয়া হ'ল। তথ্যৰ মধ্যমা, মাধ্য আৰু বহুলক উলিওৱা আৰু তুলনা কৰা।

মাহেকত খৰচ (ইউনিটত)	গ্ৰাহকৰ সংখ্যা
65 - 85	4
85 - 105	5
105 - 125	13
125 - 145	20
145 - 165	14
165 - 185	8
185 - 205	4

2. তলৰ বিভাজনৰ মধ্যমা যদি 28.5, তেন্তে x আৰু y ৰ মান উলিওৱা।

শ্রেণী অন্তৰাল	বাৰংবাৰতা
0 - 10	5
10 - 20	x
20 - 30	20
30 - 40	15
40 - 50	y
50 - 60	5
মুঠ	60

3. সকলো জীৱনবীমা সদস্যই 100 জন পলিছি গ্ৰাহকৰ বয়সৰ তথ্য বিভাজন তলত দিয়া ধৰণে

পায়। মধ্যমা বয়স উলিওৱা, যদি 18 ৰ পৰা 60 বছৰ কম বয়সৰ ব্যক্তিকেহে পলিছি দিয়ে।

বয়স (বছৰত)	পলিছি থকা গ্ৰাহকৰ সংখ্যা
20 বছৰৰ কম	22
25 বছৰৰ কম	66
30 বছৰৰ কম	244
35 বছৰৰ কম	455
40 বছৰৰ কম	783
45 বছৰৰ কম	899
50 বছৰৰ কম	922
55 বছৰৰ কম	983
60 বছৰৰ কম	1000

4. এজোপা উদ্ভিদৰ 40 টা পাতৰ দৈৰ্ঘ্য আসন্ন মিলিমিটাৰত জোখা হৈছে আৰু প্ৰাপ্ত তথ্য তলৰ তালিকাত প্ৰকাশ কৰা হৈছে।

দৈৰ্ঘ্য (মিঃমিঃত)	পাতৰ সংখ্যা
118 ⁸ - 126 ⁶	33
127 ⁷ - 135 ⁵	55
136 ⁶ - 144 ⁴	99
145 ⁵ - 153 ³	122
154 ⁴ - 162 ²	55
163 ³ - 171 ¹	44
172 ² - 180 ⁰	22

পাতৰ মধ্যমা দৈৰ্ঘ্য নিৰ্ণয় কৰা।

(ইংগিত : তথ্যসমূহ অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীলৈ পৰিবৰ্তন কৰিব লাগিব যিহেতু মধ্যমা নিৰ্ণয়ৰ সূত্ৰটো অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীত ধৰা হৈছে। শ্ৰেণীসমূহ সেয়ে পৰিবৰ্তিত হ'ব— 117.5 - 126.5, 126.5 - 135.5, . . . , 171.5 - 180.5.)

5. 400 টা নিয়ন লেম্পৰ আয়ুস কাল তলৰ তালিকাত বিভাজন কৰি দিয়া হৈছে।

আয়ুস কাল (ঘণ্টাত)	লেম্পৰ সংখ্যা
1500 - 2000	14
2000 - 2500	56
2500 - 3000	60
3000 - 3500	86
3500 - 4000	74
4000 - 4500	62
4500 - 5000	48

এটা লেম্পৰ মধ্যমা আয়ুস কাল উলিওৱা।

6. এখন স্থানীয় টেলিফোন ডায়েৰীৰপৰা 100 জন ব্যক্তিৰ উপাধি যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'ল আৰু উপাধিবোৰত থকা ইংৰাজী বৰ্ণমালাৰ আখৰৰ সংখ্যা বাৰংবাৰতা বিভাজন কৰি তলত দিয়া হ'ল।

আখৰৰ সংখ্যা	1 - 4	4 - 7	7 - 10	10 - 13	13 - 16	16 - 19
উপাধিৰ সংখ্যা	6	30	40	16	4	4

উপাধিবোৰৰ মধ্যমা আখৰৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা। উপাধিবোৰৰ মাধ্য আখৰৰ সংখ্যা উলিওৱা।

উপাধিৰ বহুলক আকাৰ উলিওৱা।

7. তলৰ বিভাজনে এটা শ্ৰেণীকোঠাৰ 30 জন ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ ওজন নিৰূপণ কৰে। ছাত্ৰৰ মধ্যমা ওজন নিৰ্ণয় কৰা।

ওজন (কিঃগ্ৰামত)	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75
ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ সংখ্যা	2	3	8	6	6	3	2

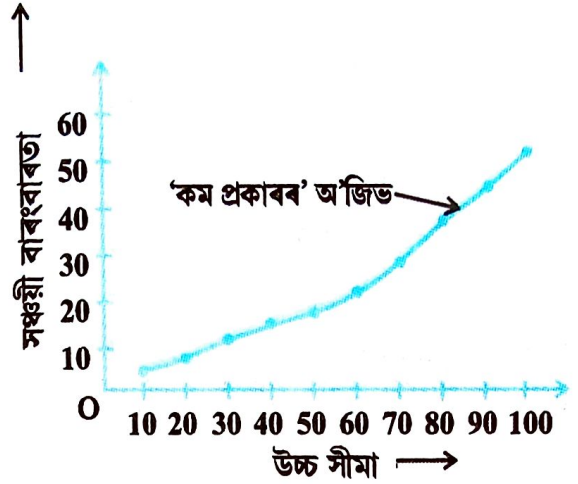
14.5. সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ লৈখিক ৰূপ (Graphical Representation of Cumulative Frequency Distribution) :

আমি সকলোৱে জানো, চিত্ৰই শব্দতকৈ ভালদৰে কয়। এটা চিত্ৰৰূপে প্ৰদত্ত তথ্যক চকুৰ পলকতে বুজাত সহায় কৰে। নৱম শ্ৰেণীত আমি তথ্যসমূহক দণ্ড চিত্ৰ, স্তম্ভলেখ আৰু বাৰংবাৰতা বহুভুজ

জৰিয়তে প্ৰকাশ কৰিছিলোঁ। এতিয়া আমি সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিভাজনক চিত্ৰেৰে প্ৰকাশ কৰিম।

উদাহৰণস্বৰূপে, তালিকা 14.13 ত দিয়া সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিভাজন বিবেচনা কৰোঁহক।

মনত পেলোৱা যে, 10, 20, 30,, 100 মানবোৰ অনুৰূপ শ্ৰেণী অন্তৰালৰ উচ্চ সীমা। তালিকাৰ তথ্যসমূহ চিত্ৰত প্ৰকাশ কৰিবলৈ আমি শ্ৰেণী অন্তৰালৰ উচ্চ সীমাবোৰ সমতল অক্ষত (x -অক্ষ) চিহ্নিত কৰিম আৰু সিহঁতৰ অনুৰূপ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতাবোৰ উলম্ব অক্ষত (y -অক্ষ) চিহ্নিত কৰিম, সুবিধামতে জোখ লৈ। দুয়োঅক্ষত জোখ একে নহ'বও পাৰে। আমি এতিয়া বিন্দুসমূহ, ক্ৰমিত যোৰ (উচ্চসীমা, অনুৰূপ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা) অৰ্থাৎ, (10, 5), (20, 8), (30, 12), (40, 15), (50, 18), (60, 22), (70, 29), (80, 38), (90, 45), (100, 53) গ্ৰাফকাগজত বহুৰাম আৰু সিহঁতক এডাল মুক্ত হাতৰ সুখম বক্ৰেৰে সংযোগ কৰিম। এই বক্ৰডালকেই সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বক্ৰ বা এডাল অ'জিভ (তাতকৈ কম প্ৰকাৰৰ) বোলে। (চিত্ৰ 14.1)

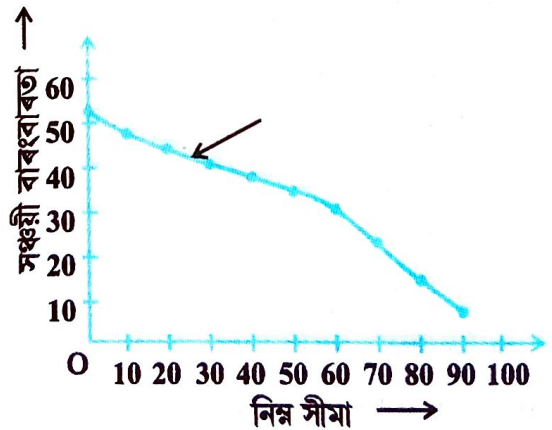


চিত্ৰ 14.1

ogive শব্দটো অ'জিভ (ojeev) বুলি উচ্চাৰণ কৰা হয় আৰু এইটো ওজি (ogee) শব্দৰ পৰা উৎপন্ন হৈছে। ogee হ'ল এনে এটা আকৃতি যি উত্তল বক্ৰৰ পৰা অৱতল বক্ৰলৈ বৈ থাকে, গতিকে S আকৃতিৰ উলম্ব প্ৰান্তৰ এটা সৈতে বক্ৰ গঠন কৰে। 14তম আৰু 15তম শতিকাৰ গোটিক (Gothic) কলাৰ এক বিশেষ বৈশিষ্ট্য হ'ল ogee আকৃতি।

এতিয়া পুনৰ আমি তালিকা 14.14 ত দিয়া সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিভাজন বিবেচনা কৰোঁহক আৰু ইয়াৰ অ'জিভ অংকন কৰিম (তাতকৈ বেছি প্ৰকাৰৰ)

মনত পেলোৱা যে, ইয়াত 0, 10, 20,, 90 হ'ল অনুৰূপ শ্ৰেণী অন্তৰাল 0-10, 10-20,, 90-100ৰ নিম্নসীমা। তাতকৈ বেছি প্ৰকাৰৰ চিত্ৰেৰে প্ৰকাশ কৰিবলৈ আমি নিম্নসীমাক x -অক্ষত আৰু অনুৰূপ সঞ্চয়ী



চিত্ৰ 14.2

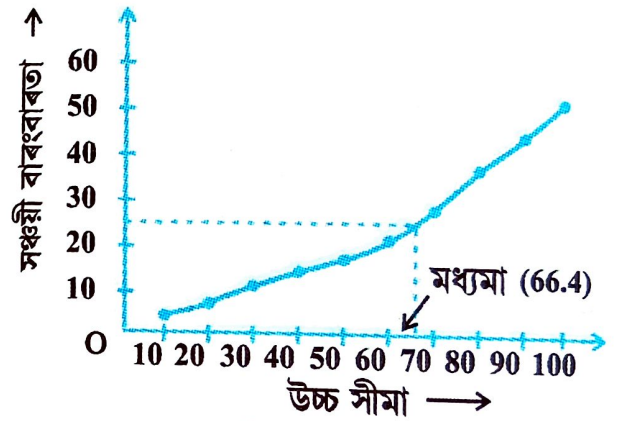
বাৰংবাৰতা সমূহ y -অক্ষত বহুৰাম। তেতিয়া আমি বিন্দুবোৰ (নিম্নসীমা, অনুৰূপ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা) অৰ্থাৎ, (0, 53), (10, 48), (20, 45), (30, 41), (40, 38), (50, 35), (60, 31), (70, 24), (80, 15), (90, 8) গ্ৰাফ কাগজত বহুৰাম আৰু মুক্ত হাতেৰে সুস্বম বক্ৰ টানি সিহঁতক সংযোগ কৰিম। যিটো বক্ৰ আমি পালো সেয়া সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বক্ৰ বা এটা অ'জিভ (তাতকৈ বেছি আকাৰৰ) (চিত্ৰ 14.2)

মন্তব্য: মন কৰিবা যে, দুয়োটা অ'জিভ (চিত্ৰ 14.1 আৰু চিত্ৰ 14.2) তালিকা 14.12ত দিয়া একেখিনি তথ্যৰ লগত জড়িত।

এতিয়া এই অ'জিভবোৰৰ কিবা প্ৰকাৰে মধ্যমাৰ লগত সম্বন্ধ আছে নেকি? এই দুডাল সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বক্ৰৰ পৰা অনুৰূপ তথ্যৰ মধ্যমা নিৰ্ণয় সম্ভৱনে আমি চাওঁ—

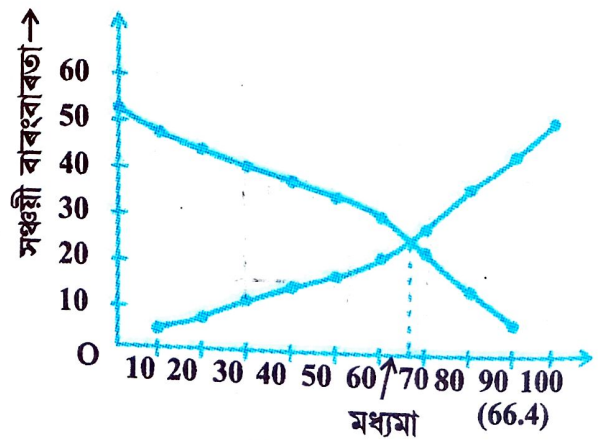
$$\text{স্বাভাৱিকতেই } \frac{n}{2} = \frac{53}{2} = 26.5, \text{ } y\text{-}$$

অক্ষৰ ওপৰত বাছি উলিয়াব পাৰি। (চিত্ৰ 14.3ত চোৱা)। সেই বিন্দুৰপৰা x -অক্ষৰ সমান্তৰালকৈ বক্ৰডাললৈ এডাল ৰেখা টানা। বক্ৰডালত কটাকটি বিন্দুৰ পৰা x -অক্ষৰ ওপৰত লম্ব টানা। এই লম্বডালে x -অক্ষক কটাকটি কৰা বিন্দুটোৱে মধ্যমা নিৰ্দ্ধাৰণ কৰে। (চিত্ৰ 14.3 চোৱা)



চিত্ৰ 14.3

মধ্যমা নিৰ্ণয়ৰ অন্য এটা উপায় তলত দিয়া হ'ল। একে অক্ষত দুয়োডাল অ'জিভ অংকন কৰা (অৰ্থাৎ তাতকৈ কম আৰু তাতকৈ বেছি) প্ৰকাৰৰ দুয়োডাল অ'জিভে পৰস্পৰ কটাকটি কৰিব। এই বিন্দুৰপৰা x -অক্ষলৈ লম্ব টানা। যিটো বিন্দুই x -অক্ষত কাটিব সি়েই মধ্যমা দিব (চিত্ৰ 14.4)।



চিত্ৰ 14.4

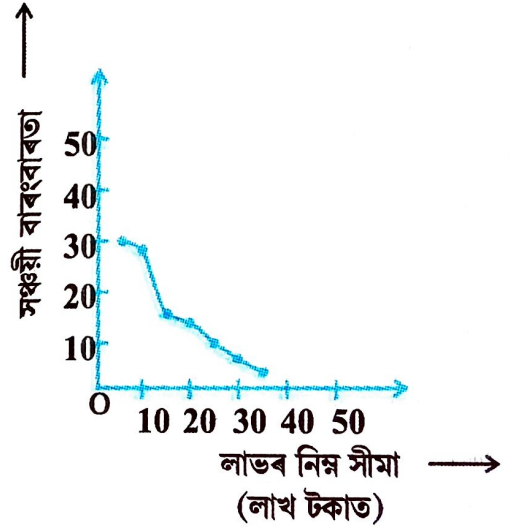
উদাহৰণ 9: এটা অঞ্চলত 30 খন দোকানে এবছৰত কৰা লাভৰ পৰিমাণ তালিকাত সন্নিৱিষ্ট কৰা হ'ল।

লাভ (লাখ টকাত)	দোকানৰ সংখ্যা (বাৰংবাৰতা)
5 ৰ সমান বা বেছি	30
10 ৰ সমান বা বেছি	28
15 ৰ সমান বা বেছি	16
20 ৰ সমান বা বেছি	14
25 ৰ সমান বা বেছি	10
30 ৰ সমান বা বেছি	7
35 ৰ সমান বা বেছি	3

ওপৰৰ তথ্যৰ বাবে দুয়োডালে অ'জিভ অংকন কৰা। আৰু মধ্যমা লাভ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান : আমি প্ৰথমে লাভৰ নিম্নসীমা সমতল অক্ষৰ দিশত আৰু সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা উলম্ব অক্ষৰ দিশত লৈ অ'জিভ অংকন কৰোঁ। তাৰ পাছত, (5, 30), (10, 28), (15, 16), (20, 14), (25, 10), (30, 7) আৰু (35, 3) বিন্দুবোৰ সংস্থাপন কৰিলো। এই বিন্দুবোৰ মুক্তহাতেৰে সুষম (মসৃণ) বক্ৰ অংকন কৰি তাতকৈ বেছি অ'জিভ চিত্ৰ 14.5ত দেখুওৱাৰ দৰে পালো।

এতিয়া, ওপৰৰ তালিকাৰপৰা শ্ৰেণী অন্তৰাল, তাৰ বাৰংবাৰতা আৰু সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা নিৰ্ণয় কৰোঁহক—



চিত্ৰ 14.5

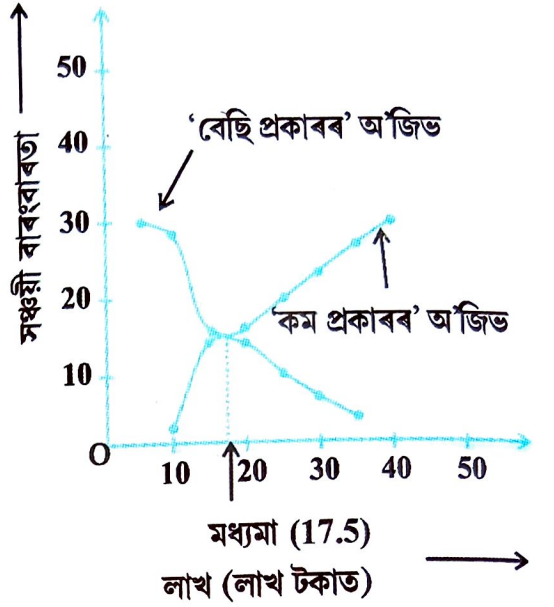
তালিকা 14.17

শ্ৰেণী অন্তৰাল	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40
দোকানৰ সংখ্যা	2	12	2	4	3	4	3
সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা	2	14	16	20	23	27	30

এই মানবোৰ লৈ একে অক্ষত (10, 2), (15, 14), (20, 16), (25, 20), (30, 23), (35, 27), (40, 30) বিন্দুবোৰ সংস্থাপন কৰি চিত্ৰ 14.6 দেখুওৱাৰ দৰে তাতকৈ কম অ'জিভ পালো।

সিহঁতৰ ছেদবিন্দুৰ ভূজ প্ৰায় 17.5, যিটো মধ্যমা। এইটো সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰিও সত্যাপন কৰিব পাৰি। সেয়ে মধ্যমা লাভ (লাখত) হ'ল 17.5 লাখ টকা।

মন্তব্য : ওপৰৰ উদাহৰণত শ্ৰেণী অন্তৰালবোৰ অবিচ্ছিন্ন। অ'জিভ অংকনত শ্ৰেণী অন্তৰাল অবিচ্ছিন্ন বুলি নিশ্চিত হ'বই লাগিব। (নৱম শ্ৰেণীত স্তম্ভ লেখৰ অংকন চোৱা)



অনুশীলনী 14.4

1. এটা ফেক্টৰীৰ 50 জন শ্ৰমিকৰ দৈনিক আয় তলৰ বিভাজনটোৱে দিয়ে।

দৈনিক আয় (টকাত)	100-120	120-140	140-160	160-180	180-200
শ্ৰমিকৰ সংখ্যা	12	14	8	6	10

ওপৰৰ বিভাজনটো তাতকৈ কম প্ৰকাৰৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিভাজনলৈ পৰিবৰ্তন কৰা আৰু ইয়াৰ অ'জিভ আঁকা।

2. এটা শ্ৰেণীৰ 35 ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ স্বাস্থ্য পৰীক্ষা কৰোঁতে ওজন তলত দিয়া ধৰণেৰে পোৱা গৈছিল।

ওজন (কিঃগ্ৰামত)	ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ সংখ্যা
38 তকৈ কম	0
40 তকৈ কম	3
42 তকৈ কম	5
44 তকৈ কম	9
46 তকৈ কম	14
48 তকৈ কম	28
50 তকৈ কম	32
52 তকৈ কম	35

তাতকৈ কম প্ৰকৃতিৰ অ'জিভ অংকন কৰা। ইয়াৰপৰা মধ্যমা ওজন চিত্ৰৰ পৰা নিকপণ কৰা আৰু সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি সত্যাপন কৰা।

3. এখন গাঁৱৰ 100 খন কৃষিক্ষেত্ৰত প্ৰতি হেক্টৰত ঘেঁহুৰ উৎপাদন তলৰ তালিকাত দিয়া হ'ল—

উৎপাদনৰ পৰিমাণ (কিঃগ্ৰাঃ প্ৰতি হেক্টৰ)	50 - 55	55 - 60	60 - 65	65 - 70	70 - 75	75 - 80
কৃষিক্ষেত্ৰৰ সংখ্যা	2	8	12	24	38	16

বিভাজনটো, তাতকৈ বেছি আকাৰৰ বিভাজনলে পৰিবৰ্তন কৰা আৰু ইয়াৰ অ'জিভ আঁকা।

14.6. সাৰাংশ (Summary) :

এই অধ্যায়ত তোমালোকে তলৰ কথাখিনি অধ্যয়ন কৰিলা :

1. সংঘবদ্ধ তথ্যৰ মাধ্যম উলিয়াব পাৰি তলৰ পদ্ধতি কেইটাৰে

(i) প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতি : $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

(ii) বিবেচিত গড় পদ্ধতি : $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

(iii) ঢাপ বিচ্যুতি পদ্ধতি : $\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right) \times h,$

য'ত ধৰা হৈছে যে শ্ৰেণীটোৰ বাৰংবাৰতা ইয়াৰ মধ্যবিন্দুত কেন্দ্ৰীভূত হয়, ইয়াক কোৱা হয় শ্ৰেণীসূচক।

2. সংঘবদ্ধ তথ্যৰ বহুলক এই সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি পাব পাৰি

$$\text{বহুলক} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h$$

য'ত চিহ্নবোৰে সিহঁতৰ সাধাৰণ অৰ্থ বহন কৰিছে।

3. এটা শ্ৰেণী অন্তৰালৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা হ'ল সেই শ্ৰেণীটোৰ পূৰ্ববৰ্তী সকলো শ্ৰেণীৰ বাৰংবাৰতাৰ সমষ্টি।

4. সংঘবদ্ধ তথ্যৰ মধ্যমা এই সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি পাব পাৰি

$$\text{মধ্যমা} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) \times h,$$

য'ত চিহ্নবোৰে সিহঁতৰ সাধাৰণ অৰ্থবহন কৰিছে।

5. তাতকৈ কম বা তাতকৈ বেছি প্ৰকাৰৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বক্ৰ বা অ'জিভ হ'ল সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ চিত্ৰৰূপ।
6. সংঘবদ্ধ তথ্যৰ মধ্যমা লেখৰ সহায়ত নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি যিটো হ'ল তথ্যৰ দুয়োডাল অ'জিভ ছেদবিন্দুৰ ভুজি।

পঢ়িবলৈ এটি টোকা (A Note to The Reader)

- সংঘবদ্ধ তথ্যৰ বহুলক আৰু মধ্যমা উলিওৱাৰ সময়ত সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰাৰ পূৰ্বেই এইটো নিশ্চিত হ'ব লাগিব যে, শ্ৰেণী অন্তৰালবোৰ অবিচ্ছিন্ন। অ'জিভ অংকনৰ সময়তো একে চৰ্ত প্ৰযোজ্য হ'ব। তদুপৰি, অ'জিভৰ ক্ষেত্ৰত দুয়ো অক্ষত জোখ একে নহ'লেও হ'ব।